LISBON SCHOOL OF ECONOMICS & MANAGEMENT
UNIVERSIDADE DE LISBOA

Licenciaturas em Economia e em Finanças

Estatística II – EN – 06/06/2016 – Duração 2h10

Nome:____ Número:___________

Notas: Certifique-se de que o seu telemóvel está desligado. Se não estiver é motivo suficiente para anulação da prova. As perguntas de escolha múltipla valem 1 valor; respostas erradas são penalizadas em 0.25. Caso nada seja dito em contrário utilize um nível de significância de 5%. Fundamente e formalize devidamente todas as respostas. Pode usar a última página para continuar qualquer questão.

Espaço reservado para classificações

TÓPICOS DE RESOLUÇÃO: **inclui apenas os tópicos de resolução. Significa que a resolução exigida ao aluno, como resposta no exame, pode ser mais detalhada, de acordo com a abordagem feita nas aulas.**

TESTE I

1. [**2.0**] Com o intuito de avaliar se existe independência entre a tendência política de uma pessoa e a sua opinião sobre a despenalização da Morte Assistida (a favor ou contra), questionaram-se 1000 indivíduos selecionados aleatoriamente conduzindo aos seguintes resultados:

	Esquerda	Centro	Direita
A favor da despenalização	220	250	75
Contra a despenalização	130	200	125

Perante estes dados, que pode concluir?

Teste de independência:

$H_0 : p_{ij} = p_i p_j \qquad H_1 : H_0$ falsa

Frequências esperadas:

	Esquerda	Centro	Direita	TOTAL
A favor da despenalização	190.75	245.25	109	545
Contra a despenalização	159.25	204.75	91	455
TOTAL	350	450	200	1000

Parcelas da estatística de teste:

4.485256	0.091998	10.6055	15.18276
5.372449	0.110195	12.7033	18.18594
Valor observado da est. De teste			33.3687

Região de rejeição:
$W_{0.05}\left\{q : q > \chi^2_{0.05}(2) = 5.99\right\}$

Decisão:
Rejeita-se H_0 . Não há evidência de independência entre a tendência política de uma pessoa e a sua opinião sobre a despenalização da Morte Assistida.

2. [**1.5**] Seja (Y_1, Y_2, Y_3) uma amostra aleatória proveniente de uma população com distribuição exponencial de valor médio θ. Considere os seguintes estimadores:

$$\widehat{\theta}_1 = Y_1, \quad \widehat{\theta}_2 = \frac{Y_1 + 2Y_2}{3}, \quad \widehat{\theta}_3 = \bar{Y}.$$

Identifique os estimadores que são centrados. Qual deles é o mais eficiente?

$E(\hat{\theta}_1) = E(Y_1) = \theta$ → Estimador centrado

$E(\widehat{\theta}_2) = E\left(\frac{Y_1+2Y_2}{3}\right) = \frac{1}{3}[E(Y_1) + 2E(Y_2)] = \frac{1}{3}[\theta + 2\theta] = \theta$ → Estimador centrado

$E(\widehat{\theta}_3) = E(\bar{Y}) = \theta$ → Estimador centrado

Eficiência:
$Var(\hat{\theta}_1) = Var(Y_1) = \theta^2$ (distribuição exponencial)

$$Var(\widehat{\theta}_2) = Var\left(\frac{Y_1 + 2Y_2}{3}\right) = \frac{1}{9}[Var(Y_1) + 4Var(Y_2)] = \frac{1}{9}[\theta^2 + 4\theta^2] = \frac{5}{9}\theta^2$$

$$Var(\widehat{\theta}_3) = Var(\bar{Y}) = \frac{1}{3}\theta^2$$

$Var(\widehat{\theta}_3) < Var(\widehat{\theta}_2) < Var(\widehat{\theta}_1)$ então $\widehat{\theta}_3$ é estimador mais eficiente.

3. Uma população X tem a seguinte função densidade:

$$f(x|\theta) = \theta x^{\theta-1}, 0 < x < 1, \theta \in R^+$$

a) [**1.5**] Deduza o estimador do método dos momentos para o parâmetro θ. Sabendo que se obteve a amostra (0.6; 0.7; 0.8; 0.5; 0.8; 0.9) estime esse parâmetro θ.

Estimador:
$$E(X) = \int_0^1 x\theta x^{\theta-1} dx = \frac{\theta}{\theta+1} = \bar{X} \Rightarrow \tilde{\theta} = \frac{\bar{X}}{1-\bar{X}}$$

Estimativa: $\bar{x} = 0.716667$ e $\tilde{\theta} = 2.529412$

4. A desigualdade de Fréchet-Cramer-Rao é particularmente útil para avaliar as propriedades dos estimadores por pontos, pois fornece:

	um limite superior para a informação de Fisher dos estimadores enviesados.
	um limite inferior para o erro quadrático médio dos estimadores consistentes.
X	um limite inferior para a variância dos estimadores centrados.
	todas as respostas anteriores.

5. Tudo o resto constante, a amplitude de um intervalo de confiança para a média de uma população normal de variância conhecida é tanto menor quanto:

	menor o grau de confiança.
	maior a dimensão da amostra.
	menor a variância da população.
X	todas as respostas anteriores.

6. A probabilidade do erro de 1.ª espécie é dada por:

	$P(Rejeitar\ H_1 \vert H_0\ falsa)$;
	$P(Não\ Rejeitar\ H_0 \vert H_0\ verdadeira)$;
X	$P(Rejeitar\ H_0 \vert H_0\ verdadeira)$;
	todas as respostas anteriores.

7. [**2.0**] Um fabricante de enlatados pretende ajustar o equipamento que produz as latas se o valor médio do peso for maior ou igual a 450 gramas. Para o efeito recolheu-se uma amostra aleatória de 15 latas , tendo-se obtido $\bar{x} = 442.35$ e $s' = 23.2$ gramas. Sabe-se ainda da história do processo que o peso das latas tem distribuição normal com desvio padrão igual a 14.5 gramas.

   Qual a decisão que o fabricante deve tomar? Qual seria a decisão do teste admitindo que o verdadeiro desvio padrão é desconhecido?

$H_0: \mu \geq 450 \qquad H_1: \mu < 450$

Estatística de teste (desvio padrão da população conhecido)

$$Z = \frac{\bar{X} - \mu}{14.5/\sqrt{15}} \sim N(0,1)$$

Valor observado da estatística de teste:

$z_{obs} =$ -2.04333

Região de rejeição:

$W_{0.05} = \{z: z < -1.645\}$

Decisão:

Rejeita-se H_0. Existe evidência favorável para que o fabricante não necessite de afinar a máquina.

Com desvio padrão da população desconhecido – estatística de teste:

$$T = \frac{\bar{X} - \mu}{S'/\sqrt{15}} \sim t(14)$$

Valor observado da estatística de teste:

$t_{obs} =$ -1.27708

Região de rejeição:

$W_{0.05} = \{z: z < -1.761\}$

Decisão:

Não se rejeita H_0. Existe evidência favorável para que o fabricante necessite de afinar a máquina.